Minsterul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar al Judeţului Constanţa

A 60-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Mangalia -Neptun – 13 aprilie 2009

CLASA a X-a – SOLUŢII ŞI BAREMURI DE CORECTARE

Problema 1. a) Arătaţi că, dacă $x, y \in (1, \infty)$ şi $x^y = y^x$, atunci $x = y$ sau există $m \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ astfel încât $x = m^{\frac{1}{m-1}}$, $y = m^{\frac{m}{m-1}}$.

b) Rezolvaţi în mulţimea $(1, \infty)$ ecuaţia cu două necunoscute

$$x^y + x^{x^{y-1}} = y^x + y^{y^{x-1}}.$$

Soluţie. a) Dacă $x = y$ avem soluţiile $x = m, y = m, m > 0$. . . . 1 punct

Dacă $x \neq y$ notăm $y = mx$. . . . . 1 punct

Înlocuind în egalitatea $y \cdot \lg x = x \cdot \lg y$ obţinem soluţiile $x = m^{\frac{1}{m-1}}$, $y = m^{\frac{m}{m-1}}$, $m \neq 1$. . . . . 2 puncte

b) Dacă $x^y > y^x$ rezultă că $(x^y)^{(x^y)} > (y^x)^{(y^x)}$. . . . . 1 punct

Ridicând la puterea $\frac{1}{xy}$, vom obţine că $x^{x^{y-1}} > y^{y^{x-1}}$, de unde $x^y + x^{x^{y-1}} > y^x + y^{y^{x-1}}$, fals. . . . . 3 puncte

Deci $x^y = y^x$. Soluţiile sunt cele indicate la punctul a).

Problema 2. Fie $a \in [2 + \sqrt{2}, 4]$. Determinaţi minimul expresiei $|z^2 - az + a|$, când $z \in \mathbb{C}$ şi $|z| \leq 1$.

Soluţie. Fie $z_1 = \overline{z_2} = \frac{a}{2} + \frac{i\sqrt{4a-a^2}}{2}$ rădăcinile ecuaţiei $z^2 - az + a = 0$. . . . . $1 punct$

Avem $|z^2 - az + a| = |z - z_1||z - z_2| = MA \cdot MB$, unde M, A, B sunt punctele din plan corespunzătoare afixelor z, z_1, respectiv z_2. Fie T punctul de afix 1 şi M_1 intersecţia dintre AM şi cercul unitate dacă unghiul AM_1B este ascuţit (în caz contrar, M_1 va fi intersecţia dintre BM şi cercul unitate). . . . . 2 puncte

Avem $MA \cdot MB \geq M_1A \cdot M_1B \geq TA \cdot TB = (TA)^2$, ... 2 puncte

deci

$$min|z^2 - az + a| = |z_1 - 1|^2 = \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4a - a^2}}{2}\right)^2 = 1.$$

. . . . 2 puncte

Observaţie: Să notăm cu A_1 şi B_1 punctele din plan corespunzătoare soluţiilor ecuaţiei $z^2 - az + a = 0$, $a = 2 + \sqrt{2}$. Măsura unghiului A_1TB_1 este de $90°$, ceea ce explică de ce unul din unghiurile AM_1B este întotdeauna ascuţit şi $AM_1 \cdot M_1B \geq AT \cdot TB$.

Problema 3. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Înlocuind $y = 0$ în relaţia dată şi înţelegând toate relaţiile următoare ca având loc pentru orice valoare reală a variabilelor, avem: $f(x^3) = xf(x^2)$ deci şi $f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3)$ . . . . 2 puncte

adică $f(x + y) = f(x) + f(y)$. . . . . 1 punct

Observăm că dacă f verifică ecuaţia dată atunci, pentru orice constantă c reală, şi cf verifică relaţia. Putem presupune atunci că $f(1) = 1$ sau $f(1) = 0$.

Dacă $f(1) = 1$, atunci din $f((x+1)^3) = (x+1)f((x+1)^2))$ avem $2f(x^2) + f(x) = 2xf(x) + x$, iar cu substituţia $x \to x+1$ obţinem $2f((x+1)^2) + f(x+1) = (2x+2)f(x+1) + x+1$. Ultimele două relaţii duc la $f(x) = x$. Conform observaţiei avem $f(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}^*$. . . . . 2 puncte

Dacă $f(1) = 0$, atunci $f((x + 1)^3) = (x + 1)f((x + 1)^2)$ adică $2f(x^2) + f(x) = 2xf(x)$. Analog cu cazul precedent avem $2f((x + 1)^2) + f(x + 1) = (2x + 2)f(x + 1)$ ceea ce implică $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. . . . . 2 puncte

În concluzie $f(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Vom spune că un număr natural $n \geq 4$ este *neobişnuit* dacă se poate aşeza câte un număr real în fiecare din cele n^2 pătrate unitate ale unui pătrat $\mathcal{P}$ de latură n, astfel încât suma celor 9 numere din orice pătrat 3×3 conţinut de $\mathcal{P}$ să fie strict negativă, iar suma celor 16 numere din orice pătrat 4×4 conţinut de $\mathcal{P}$ să fie strict pozitivă.

Determinaţi toate numerele neobişnuite.

Soluţie. Vom arăta că numerele *neobişnuite* sunt $n = 4$ şi $n = 5$. Pentru $n \geq 6$ suma elementelor tuturor pătratelor 3×3 din pătratul mare este egală cu suma elementelor tuturor pătratelor 4×4 din acelaşi pătrat. . . 4 puncte

Pentru a exemplifica în acelaşi timp că $n = 4$ şi $n = 5$ sunt numere *neobişnuite* propunem cititorului următorul exemplu: un pătrat de dimensiune 5×5 în care coloana din mijloc conţine numai -5, celelalte elemente fiind 2. . . . . 3 puncte